SISTEMAS POR ROUCHÉ FICHA 3

1) Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m y resuélvelo en el caso en que sea compatible indeterminado, utilizando la regla de Cramer

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=-1 \\ x-2y+2z=m \\ 3x-y+m^2z=0 \end{array}\right\}$$

2) Estudia según el valor de m, el sistema $\left.\begin{array}{l} x+my+z=m+2 \\ x+y+mz=-2(m+1) \\ mx+y+z=m \end{array}\right\}$ y resuélvelo por Cramer en el caso $m=-1$

3) Dado el sistema $\left.\begin{array}{l} 2x+y=m \\ -2x+y=-1 \\ x-my=-2 \end{array}\right\}$ discútelo para los distintos valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

4) Discute, en función del parámetro a, el sistema $\left.\begin{array}{l} ax+y+z=4 \\ x-ay+z=1 \\ x+y+z=a+2 \end{array}\right\}$ ¿Existe algún caso en el que este sistema sea compatible indeterminado? En caso afirmativo, resuélvelo.

5) Estudia, según los valores de a y b, la compatibilidad del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y-2z=b \\ x+y+z=5 \\ 4x-5y+az=-10 \end{array}\right\}$$

SOLUCIONES

1) $\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=-1 \\ x-2y+2z=m \\ 3x-y+m^2z=0 \end{array}\right\} \to A'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & m \\ 3 & -1 & m^2 & 0 \end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & m^2 \end{pmatrix}$ veamos los posibles rangos de ambas matrices, empezamos calculando el determinante de A:

$|A| = 5-5m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$

- Si $m \neq 1$ y $m \neq -1 \to |A| \neq 0 \to rang(A) = 3 = rang(A') =$ nº de incógnitas
  Sistema COMPATIBLE DETERMINADO
- Si $m = 1$, tenemos el sistema:

$A'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, sabemos que $rang(A) = 2 \to \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \right)$

veamos el rango de A', para ello tomamos el menor anterior con la columna de los término independientes:

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rang(A') = 2 = rang(A) <$ nº de incógnitas $\to$ C. INDETERMINADO

Cramer: $\left.\begin{array}{l} 2x+y=-1+z \\ x-2y=1-2z \end{array}\right\} \to x = \dfrac{\begin{vmatrix} -1+z & 1 \\ 1-2z & -2 \end{vmatrix}}{-5} = -\dfrac{1}{5};\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1+z \\ 1 & 1-2z \end{vmatrix}}{-5} = \dfrac{3-5z}{-5} = -\dfrac{3}{5}+z$

Solución del sistema: $x = -\dfrac{1}{5}; \quad y = -\dfrac{3}{5}+t; \quad z = t$

- Si $m = -1$ sabemos que $rang(A) = 2 \to \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \right)$ veamos el rango de A', para ello tomamos el menor anterior con la columna de los término independientes:

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rang(A') = 3 \neq rang(A) \to$ SISTEMA INCOMPATIBLE

2) a) $\left.\begin{array}{l} x+my+z=m+2 \\ x+y+mz=-2(m+1) \\ mx+y+z=m \end{array}\right\} A'=\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & m+2 \\ 1 & 1 & m & -2(m+1) \\ m & 1 & 1 & m \end{pmatrix}$, hallamos determinante de A

$|A| = m^3-3m+2 = 0 \Rightarrow m = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

- Si $m \neq 1$ y $m \neq -2 \ \to |A| \neq 0 \to rang(A) = 3 = rang(A') =$ nº de incógnitas SCD
- Si $m = 1 \to rang(A) = 1 \neq rang(A') = 2 \to$ S. INCOMPATIBLE
- Si $m = -2 \to rang(A) = 2 = rang(A') = 2 \to$ SC INDETERMINADO

b) Para $m = -1 \to rang(A) = 3 = rang(A') = 3 \to$ SCD, lo resolvemos por Cramer y sale que $x = \dfrac{1}{2}; \quad y = -\dfrac{1}{2}; \quad z = 0$

3) $\left.\begin{matrix} 2x+y=m \\ -2x+y=-1 \\ x-my=-2 \end{matrix}\right\} \to A'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to |A'|=2m^2-3m-9=0 \to m=\left\langle\begin{matrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \end{matrix}\right.$

- Si $m \neq 3$ y $m \neq -\frac{3}{2}$ $\to rang(A')=3 \neq rang(A')=2 \to$ S. INCOMPATIBLE
- Si $m=3 \to rang(A')=2=rang(A)=2=n \to$ S.COMP.DETERMINADO

$\left.\begin{matrix} 2x+y=3 \\ -2x+y=-1 \end{matrix}\right\} 2y=2 \Rightarrow y=1 \to 2x+1=3 \Rightarrow x=1 \to SOL: x=1;\ y=1$

- Si $m=-\frac{3}{2} \to rang(A')=2=rang(A)=2=n \to$ S.COMP.DETERMINADO

$\left.\begin{matrix} 2x+y=-\frac{3}{2} \\ -2x+y=-1 \end{matrix}\right\} 2y=-\frac{5}{2} \Rightarrow y=-\frac{5}{4} \to 2x-\frac{5}{4}=3 \Rightarrow x=-\frac{1}{8} \to SOL: x=-\frac{1}{8}; y=-\frac{5}{4}$

4) $\left.\begin{matrix} ax+y+z=4 \\ x-ay+z=1 \\ x+y+z=a+2 \end{matrix}\right\} A'=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \to |A|=-a^2+1=0 \Rightarrow a=\pm 1$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$ $\to rang(A)=3=rang(A')=n \to$ S.COMP. DETERMINADO
- Si $a=1 \to rang(A)=2 \neq rang(A')=3 \to$ S. INCOMPATIBLE
- Si $m=-1 \to rang(A)=2=rang(A')=2<n \to$ S.COMP.INDETERMINADO

$\left.\begin{matrix} -x+y=4-z \\ x+y=1-z \end{matrix}\right\} 2y=5-2z \Rightarrow y=\frac{5-2z}{2} \to x+\frac{5-2z}{2}=1-z \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

SOLUCIÓN: $x=-\frac{3}{2};\quad y=\frac{5}{2}-t;\quad z=t$

5) $\left.\begin{matrix} 2x-y-2z=b \\ x+y+z=5 \\ 4x-5y+az=-10 \end{matrix}\right\}$ observa que $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0; \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & a \end{vmatrix}=3a+24=0 \to a=-8$

y también que, para le rango de A': $\begin{vmatrix} 2 & -1 & b \\ 1 & 1 & 5 \\ 4 & -5 & -10 \end{vmatrix}=-9b=0 \to b=0$

- Si $a \neq -8$ y b cualquiera $\to rang(A)=3=rang(A')=n \to$ S. C. DETERMINADO
- Si $a=-8$ y $b \neq 0$ $\to rang(A)=2 \neq rang(A')=3 \to$ S. INCOMPATIBLE
- Si $a=-8$ y $b=0$ $\to rang(A')=2=rang(A)=2=n \to$ S.C.INDETERMINADO